Matrikelnummer: .

TEST-KLAUSUR VO ALGEBRA WS 2014, 26. NOV 2014

1 Beschreibe eine nicht-triviale Abbildung $f : R \to S$ zwischen zwei Ringen, die (a) additiv aber nicht multiplikativ, (b) multiplikativ aber nicht additiv ist.

$Antwort$: (a) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to 2x$ ist additiv aber nicht multiplikativ. Allgemeiner sind für Ringe R Multiplikationsabbildungen $f : R \to R$, $x \to y \cdot x$ mit $y \in R$ additiv aber meistens nicht multiplikativ.

(b) Die Abbildung $g : \mathrm{M}_n(K) \to K$, $A \to \det(A)$ ist multiplikativ aber nicht additiv, ebenso wie etwa die Norm $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \to |z|$.

2 (a) Zeige, dass die Gruppe S_4 der Permutationen von 4 Elementen eine Untergruppe G vom Index 6 besitzt. (b) Finde eine zweite solche Untergruppe H. (c) Finde G und H so, dass die beiden Gruppen nicht zueinander konjugiert sind.

$Antwort$: Eine Untergruppe der S_4 vom Index 6 hat Ordnung $24 : 6 = 4$. Es gibt bis auf Isomorphie nur zwei Gruppen der Ordnung 4, nämlich $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Wähle also $G = \langle (1234) \rangle$ und $H = \langle (12), (34) \rangle$.

3 Vereinfache das Erzeugendensystem des Ideals $I = \langle x^2 + y^3, y^2 - z^3, z^2 + x^3 \rangle$ in der Lokalisierung $K[x, y, z]_{\langle x,y,z \rangle}$ des Polynomrings.

$Antwort$: Rechnen modulo I liefert

$$x^2 + y^3 = x^2 + y \cdot y^2 = x^2 + y \cdot (y^2 - z^3) + y \cdot z^3 \equiv x^2 + y \cdot z^3 = x^2 + yz \cdot z^2 \equiv x^2 - yz \cdot x^3 = x^2 \cdot (1 - xyz) \in I.$$

Aber $1 - xyz$ ist in $K[x, y, z]_{\langle x,y,z \rangle}$ invertierbar, folglich ist $x^2 \in I$. Aus Symmetriegründen gilt dies dann auch für y^2 und z^2, also erhalten wir $\langle x^2, y^2, z^2 \rangle \subseteq I$. Daraus folgt sofort $I = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$.

4 Beschreibe eine Situation, in der das semi-direkte Produkt von Gruppen in natürlicher Weise auftritt.

$Antwort$: Die Gruppe G der Bewegungen des $\mathbb{R}^2$ ist das semi-direkte Produkt der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit der additiven Gruppe $\mathbb{R}^2$ der Translationen auf $\mathbb{R}^2$. Die natürliche Operation von G auf $\mathbb{R}^2$ liefert $A(B \cdot x + w) + v = AB \cdot x + (Aw + v)$, also ist die Verknüpfung auf dem kartesischen Produkt $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ nicht die komponentenweise und G kann nicht das direkte Produkt dieser beiden Gruppen sein.

Ein anderes Beispiel eines semi-direkten Produktes liefert die Symmetriegruppe D_n des regelmässigen n-Ecks als Untergruppe der $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Sie ist von der Gestalt $D_n = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$, wobei die Gruppe $\mathbb{Z}_2$ auf $\mathbb{Z}_n$ in natürlicher Weise durch Konjugation der Drehung mit der Spiegelung operiert.